УДК 631.347

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

© 2014 г. ***М. В. Кузнецова, О. Н. Маслак***

Новочеркасский инженерно-мелиоративный институт им. А. К. Кортунова Донского государственного аграрного университета

Описана математическая модель планирования эксперимента при поиске оптимальных условий на примере расчета экономически оптимальных элементов техники полива. Получена математическая модель в виде уравнения второго порядка и графическое изображение изолиний равной глубины.

Ключевые слова: *значения факторов, поверхность отклика, симплексный метод, область оптимума, матрица планирования.*

Authors present a mathematical modeling of the experiment planning for the optimal conditions determining by the example of estimation of the economically optimal elements for the watering systems. As a result authors present a mathematical model that is a second-order differential equation, and a graphic picture of the similar depth tessellation lines.

Key words: *value of factor; response surface; simplex method; optimal region; planning matrix.*

Для решения многих исследовательских задач прикладного характера возникает необходимость нахождения численных значений изучаемого объекта, при которых отклик (выходной параметр) становится максимальным или минимальным. Поставленная перед исследователем задача является оптимизационной и основной ее целью ставится нахождение координат экстремальной точки (x_1, x_2, …, x_n) поверхности отклика $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если произвольно изменять факторы при многократном проведении опыта, то этот процесс сложен и редко позволяет достигнуть нужного результата (зависимости функции отклика от факторов). Используя разбиение всего процесса на шаги, т.е. итерационные действия, мы сможем незначительные факторы исключать из дальнейших исследований. Если результаты эксперимента представлены в виде уравнений регрессии, то геометрической иллюстрацией являются геометрические поверхности отклика.

Для их построения необходимо уравнения регрессии привести к каноническому виду. Для этого проводят преобразования, заключающиеся в том, что выбирается новая система координат, в которой данное уравнение записывается в более простом виде. Чтобы получить новую систему координат, необходимо осуществить параллельный перенос старой системы в новое начало координат, затем повернуть координатные оси на определенный угол. Данные преобразования позволяют определить тип кривых (гипербола, эллипс и т.д.) геометрического образа изучаемой функции отклика. Если при решении задач необходимо учитывать большое число факторов, то анализ полученных канонических уравнений, содержащих много переменных, оказывается крайне затруднительным; построения данных кривых требует специальных навыков. При решении практических задач изучают геометрические поверхности с помощью двухмерных сечений поверхностей, для построения которых используют адекватные математические модели.

Существует множество методов пошаговой оптимизации: покоординатной оптимизации (Гаусса — Зейделя), крутого восхождения (Бокса — Уилсона) и т.д.

Поиск оптимума методом покоординатной оптимизации в графическом виде представляет собой следующее: выбирается произвольная точка А и определяются ее координаты; затем поочередно варьируется каждый фактор. При этом сначала изменяют один фактор при фиксированных остальных и продолжают это до тех пор, пока не прекращается прирост функции отклика. В дальнейшем изменяют другой фактор, а остальные постоянны. При этом процедуру продолжают дальше.

Метод Гаусса — Зейделя требует проведения большого числа опытов, чтобы достичь координат оптимума. Он применим, если факторов немного и является несовершенным методом. Рассмотрим метод крутого восхождения (Бокса — Уилсона) — одна из модификаций градиентного метода. Градиент — это линии перпендикулярные линиям равного уровня, на которых функция отклика имеет постоянные значения. Совершая движение в направлении градиента функции, можно наиболее быстро достичь оптимального значения. Сущность данного метода заключается в том, что шаговое движение происходит в направлении градиента. Преимущество этого метода в том, что направление корректируется не после каждого шага, а только в том случае, если достигается частный экстремум в некотором направлении. Для движения по градиенту необходимо изменять переменные пропорционально их коэффициентам регрессии в соответствии со знаком. Напомним, что градиент функции отклика вычисляется по формуле:

$$grad y = \frac{\partial y}{\partial x} i + \frac{\partial y}{\partial y} j,$$

где i, j — единичные векторы в направлении координатных осей.

Движение в данном направлении продолжается до тех пор, пока не достигнут локальный максимум.

Более подробно рассмотрим симплексный метод планирования, эффективность использования которого подтверждена в инженерной практике мелиорации, металлургии и других областях. Преимущество этого метода заключается в том, что область оптимума находится без предварительного изучения влияния изучаемых факторов. В отличие от метода Бокса — Уилсона, в котором требуется вычисление градиента функции отклика, в симплексном методе строится простейший многогранник в n-пространстве. Вершины многогранника равны значениям факторов в опытах. Простейший выпуклый многогранник (симплекс) имеет $n + 1$ вершину в n-мерном пространстве, т.е. при $n = 5$ симплекс — любой шестигранник. Если построить правильный шестигранник, то симплекс называют правильным (регулярным). При построении исходного симплекса в первом приближении величины факторов принимают из практических соображений и на основе предварительных исследований. Затем находят вершину, в которой функция отклика минимальна. Чтобы достигнуть оптимума проводят дополнительный опыт в новой точке, зеркально отображенной точке с худшим результатом.

К недостаткам симплексного планирования относятся следующие:

1) В данной области факторного пространства можем найти только один экстремум изучаемой функции отклика, и только при расширении факторного пространства возможен поиск других экстремумов;

2) Величина выбранного интервала варьирования факторов влияет на эффективность нахождения экстремума функции отклика.

Рассмотрим конкретный пример нахождения функции отклика из мелиорации: найдем оптимальную глубину промачивания при орошении. Определим при заданной поливной норме (D_{ir}), длине борозды (l_f), уклона (i), расхода в борозду (q), продолжительности полива (t), скорости движения воды в борозде (V) максимальную глубину промачивания (h) борозды. В нашем расчете факторами являются: D_{ir}, l_f, i, q, t, V, а функцией отклика — y (D_{ir}, l_f, i, q, t, V). Условия кодирования приводятся в табл. 1.

В результате обработки данных получено следующее линейное уравнение:

$$h = 1{,}03 + 0{,}11X_1 - 0{,}09X_2 - 0{,}07X_3 + \\ + 0{,}01X_4 + 0{,}05X_5 - 0{,}01X_6.$$

Вычисляем коэффициент регрессии, по которому оцениваем влияние соответствующего фактора.

Таблица 1

Кодирование и варьирование переменных

Факторы	Код	Основной уровень (0)	Интервал	Нижний уровень (–)	Верхний уровень (+)
D_{ir}, тыс. м^3/га	1	0,9	0,1	0,8	1
l_f, км	2	0,15	0,1	0,05	0,25
i	3	0,006	0,002	0,004	0,008
q, л/с	4	1,5	0,5	1	2
t, час	5	2,1	0,5	1,6	2,6
V, м/с	6	0,16	0,04	0,12	0,2

Результаты первой группы позволили определить степень влияния каждого фактора на исследуемую функцию отклика (глубину промачивания), рис. 1.

Величина поливной нормы оказывает наибольшее влияние на глубину промачивания — 19%, длина борозды — 17%, уклон — 13%, продолжительность полива — 10%. Наименьшее влияние оказали скорость движения воды — 3% и расход в борозду — 1,5%. Эти факторы закодированы как X_6 и X_4, и исключаются из дальнейшего эксперимента.

Обработка данных позволила получить математическую модель в виде уравнения второго порядка. При этом коэффициенты модели проверялись на значимость из условия: коэффициент i-фактора должен был быть не меньше критического значения критерия Стьюдента при уровне значимости 5%. Для оценки эксперимента и проверки статистической значимости коэффициентов уравнений проведено четыре параллельных опыта в центре плана (на основных уровнях всех исследуемых факторов).

Коэффициенты модели статистически значимы в случае выполнения условия:

$$b_i \geq b_{kp} = t \cdot S_{bi},$$

где b_i — коэффициент i-того фактора; $b_{кр}$ — критическое значение критерия Стьюдента при выбранном уровне значимости 5%; S_{bi} — ошибка определяется коэффициентом модели.

Отбросив незначимые коэффициенты, после второго этапа получена модель вида:

$$h = 1{,}01 + 0{,}15X_1 - 0{,}03X_2 - 0{,}08X_1^2 + \\ + 0{,}30X_3^2 - 0{,}09X_1X_3 - 0{,}08X_1X_5 - 0{,}07X_2X_3.$$

Максимальное и минимальное значения глубины промачивания составили, соответственно, 1,19 и 0,70 м.

Определение оптимальных значений факторов X_1 — поливной нормы и X_2 — дли-

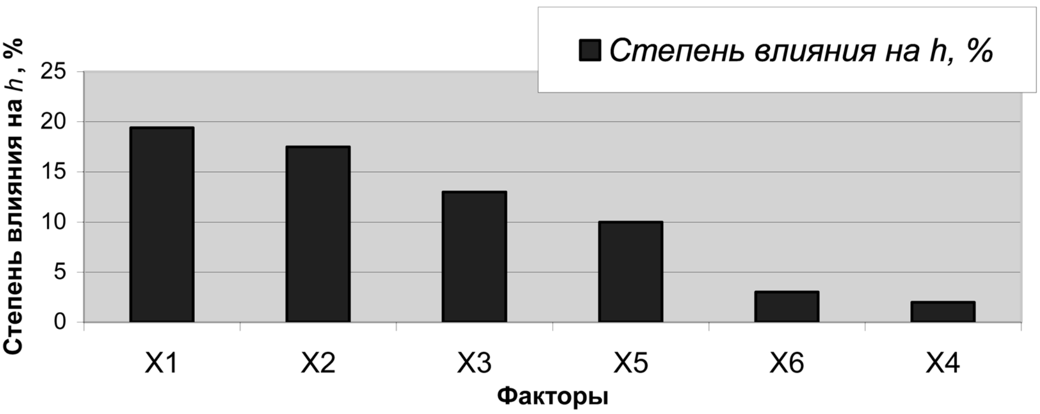

Рис. 1. Степень влияния исследуемых факторов X_i на глубину промачивания

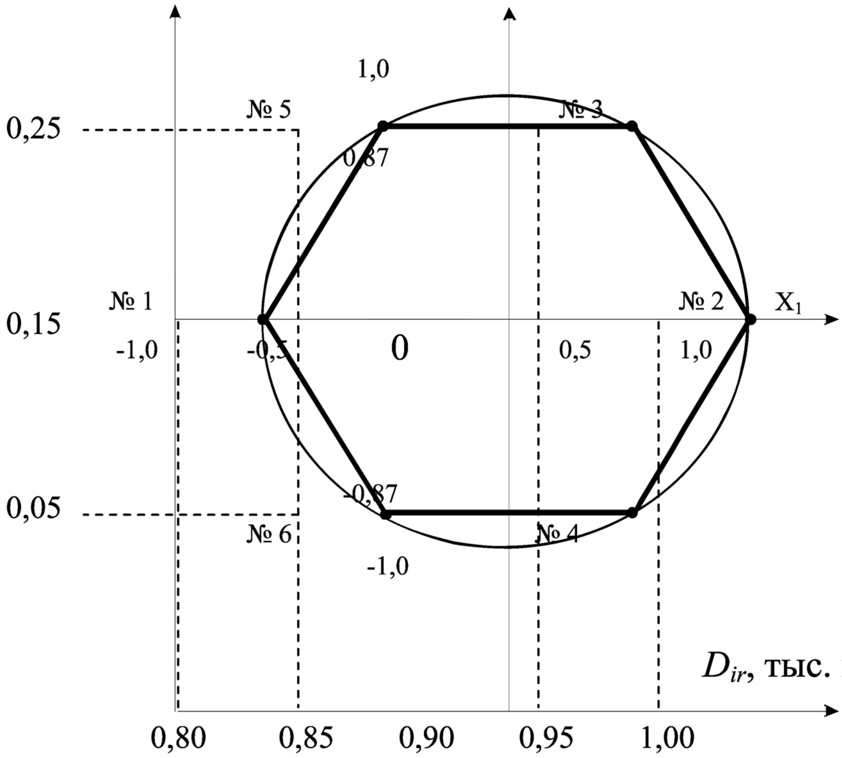

Рис. 2. Симплексно-суммируемый план типа правильного шестиугольника

ны борозды возможно лишь при принятии постоянными менее значимых факторов X_3 — уклона и X_5 — продолжительности полива. Уклон равен 0,005, а продолжительность полива — 2,5 часа. Третья группа опытов проводилась определения оптимальных значений факторов X_1 (D_{ir}) и X_2 (l_f) с применением симплексно-суммируемого плана типа правильного шестиугольника (рис. 2).

Матрица планирования приведена в таблице 2.

По результатам проведенной группы опытов получена двухфакторная модель в общем виде:

Таблица 2

Результаты третьей группы опытов

№ опыта	План		Значения факторов		Глубина промачивания h_i, м
	X_1	X_2	D_{ir}, тыс. м^3/га	l_f, км	
1	–1	0	0,8	0,15	0,93
2	1	0	1	0,15	0,86
3	0,5	0,87	0,95	0,25	0,82
4	0,5	–0,87	0,95	0,05	1,07
5	–0,5	0,87	0,85	0,25	0,87
6	–0,5	–0,87	0,85	0,05	1,1
7	0	0	0,9	0,15	0,96
8	0	0	0,9	0,15	0,92
9	0	0	0,9	0,15	0,95
10	0	0	0,9	0,15	0,98

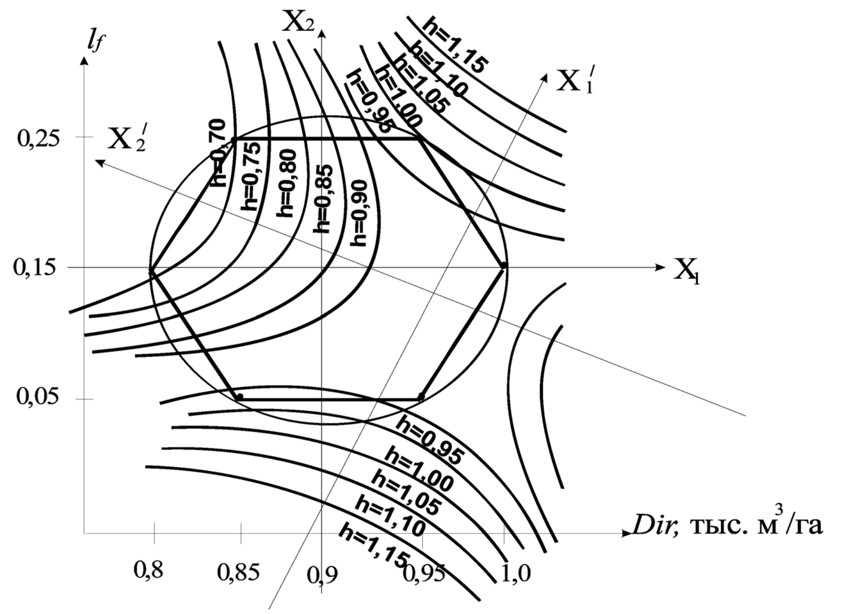

Рис. 3. Геометрические образы поверхности откликов X_1 (D_{ir}) и X_2 (l_f), полученные в результате третьей группы опытов

$$h = 0{,}063X_1^2 + 0{,}12X_1X_2 \cdot 0{,}031X_2^2 + \\ + 0{,}036X_1 \cdot 0{,}14X_2 + 0{,}958.$$

Приведем к каноническому виду общее уравнение кривой второго порядка. Применяем для преобразования поворота осей координат формулы:

$$X_1 = X_1' \cos\alpha - X_2' \sin\alpha;$$

$$X_2 = X_1' \sin\alpha - X_2' \cos\alpha;$$

$$0{,}63\,(X_1' \cos\alpha - X_1' \sin\alpha)^2 + \\ + 0{,}12\,(X_1' \cos\alpha - X_2' \sin\alpha) \cdot (X_1' \sin\alpha + \\ + X_2' \cos\alpha) - 0{,}031\,(X_1' \sin\alpha + X_2' \cos\alpha)^2 + \\ + 0{,}036\,(X_1' \cos\alpha - X_2' \sin\alpha) - \\ - 0{,}14\,(X_1' \sin\alpha + X_2' \cos\alpha) + 0{,}958 = 0.$$

При надлежащем выборе α освободимся от члена с произведением X_1X_2.

Каноническая форма модели:

$$0{,}18\,(X_1')^2 - 0{,}11\,(X_2')^2 = h - 0{,}93.$$

Коэффициенты при X_1' и X_2' имеют противоположные знаки, поэтому поверхность отклика представляет тип «минимакс». Подставляя конкретные значения h, получаем уравнения гипербол, которые являются сечением поверхности. Построенные проекции сечений на координатную плоскость являются изолиниями равного выхода параметра, который изучается.

Определяем координаты центра S, величину угла α и направление поворота, необходимые для построения геометрического образа поверхностей. В наших опытах вычисления приводят к следующим результатам: S (0,7 – 0,2); α = 63°. Это означает, что ось надо повернуть на угол α против часовой стрелки по отношению к оси $0X_1$ вокруг точки S. Геометрический образ поверхности отклика отображает рис. 3.

Анализируя данный рисунок, отмечаем, что глубина промачивания увеличивается при движении фактора X_1' от центральной точки, в тоже время уменьшается при движении вдоль оси X_2'. Если увеличивать глубины промачивания, требуется изучение новой области, т.к. необходимо удаление от центра. Геометрическая интерпретация результатов исследований (изолиний равной глубины, рис. 3) наглядна. С помощью графического изображения легко находить оптимальное значение параметров (D_{ir}, l_f), обеспечивающих оптимизацию исследуемого параметра h. Использование геометрических образов поверхности отклика может быть использовано в качестве номограммы для определения глубины промачивания h в зависимости от поливной нормы и длины борозды (D_{ir}, l_f), в данном диапазоне изменения факторов.

Литература

1. *Палий И.А.* Линейное программирование. — М.: Эксмо, 2008.
2. Орошение земель Ростовской области. Монография. / Под ред. В.М. Волошкова, В.В. Турулева. — Ростов н/Д: Изд-во «Эверест», 2009.
3. *Колдаев В.Д.* Численные методы и программирование. — М.: Форум-Инфа, 2009.

Поступила в редакцию 22 декабря 2013 г.

Мария Владимировна Кузнецова — кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры математики Новочеркасского инженерно-мелиоративного института им. А.К. Кортунова Донского государственного аграрного университета.

Maria Vladimirovna Kuznetsova — Ph.D., Candidate of Agriculture Science, docent of the Mathematics department of Novocherkassk Engineering and Land Reclamation Institute of A.K. Kortunov name of Don State Agrarian University.

346428, г. Новочеркасск, ул. Пушкинская, 111
111 Pushkinskaya st., 346428, Novocherkassk, Rostov reg., Russia
Тел.: +7 (918) 552-99-66; e-mail: smusngma@yandex.ru

Ольга Николаевна Маслак — кандидат технических наук, доцент кафедры математики Новочеркасского инженерно-мелиоративного института им. А.К. Кортунова Донского государственного аграрного университета.

Olga Nikolayevna Maslak — Ph.D., Candidate of Technics, docent of the Mathematics department of Novocherkassk Engineering and Land Reclamation Institute of A.K. Kortunov name of Don State Agrarian University.

346428, г. Новочеркасск, ул. Пушкинская, 111
111 Pushkinskaya st., 346428, Novocherkassk, Rostov reg., Russia
Тел.: +7 (919) 882-71-62; e-mail: smusngma@yandex.ru