

УДК 338.554

# ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНДЕКСОВ ЦЕНЫ И ОБЪЕМА НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ОБЩЕГО ИНДЕКСА

© 2010 г. А. В. Курицын\*, С. В. Сологубов\*\*

*\*Филиал Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)  
в г. Георгиевске*

*\*\*Филиал Российского государственного гуманитарного университета в г. Георгиевске  
Ставропольского края*

*В статье рассматривается построение индексов цены и объема на основе аналитического исследования пространственной функции общего индекса. Расширяется понятие гиперболического индекса. Предлагаются новые формулы для расчета индексов цены и объема.*

*Ключевые слова: индекс цены; индекс объема; пространственная функция; индексное отношение.*

*In article authors consider the construction of price and volume indexes, based on an analytical research of general index's spatial function. They also extend a concept of a hyperbolic index, and present some new formulas for calculation of price and volume indexes.*

*Key words: a price index; a volume index; spatial function; the index relation.*

В современной индексологии общепринято считать, что главная цель индекса заключается в разложении изменений стоимостных агрегатов на общие компоненты изменения цены и количества.

Наиболее часто используемой в практической деятельности методикой разложения стоимостных агрегатов является способ, предложенный Фишером [1] и названный Фришем [2] «критерием произведения», согласно которому

$$I_v = I_q \times I_p, \quad (1)$$

где  $I_v$  — изменение стоимостного агрегата или, в отечественной индексологии, индекс стоимости;  $I_q$  — индекс количества (индекс физического объема), связанный с изменением количеств за период от «0» до «1»;  $I_p$  — индекс цен, характеризующий их изменение в текущем периоде «1» по сравнению с базисным периодом «0».

Большинство индексологов считает, что формулы индексов цены и количества должны принадлежать к небольшому классу индексов, называемых гиперболическими. Характерной чертой гиперболических индексов

является то, что они рассматривают цены и количества обоих сравниваемых периодов симметричным способом. Именно «...благодаря свойству симметричности применение какого-либо гиперболического индекса представляется желательным» [3].

Гиперболические индексы представляют в индексологии целое семейство, к которому, в частности, относятся индексы Фишера, Уолша, Торнквиста. Общей формулой гиперболического индекса является формула квадратичного среднего степени  $r \neq 0$ . Так индекс цен, представляющий собой квадратичное среднее степени  $r$ , определяется выражением:

$$I_p = \sqrt[r]{\frac{\sum s_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)}{\sum s_1 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)}} \quad (2)$$

где  $p_0$  и  $p_1$  — цены в базисном и отчетном периодах, соответственно;

$s_0 = \frac{p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$  — доля фактических расходов

на товар в базисном периоде;

$s_1 = \frac{p_1 q_1}{\sum p_1 q_1}$  — доля фактических расходов

на товар в отчетном периоде;  $q_0$  и  $q_1$  — количества товаров в базисном и отчетном периодах, соответственно.

При  $r = 2$  уравнение (2) сводится к индексу цен Фишера; при  $r = 1$  оно эквивалентно индексу цен Уолша; в пределе  $r \rightarrow 0$  оно становится равным индексу цен Торнквиста.

Диверт в 1976 году [4] охарактеризовал формулу индекса как гиперболическую, когда эта функциональная форма является гибкой, например, однородной квадратичной. Для нашего случая однородная квадратичная функция имеет вид:

$$mI_q^2 + nI_q I_p + cI_p^2 = I_v. \quad (3)$$

Одним из возможных канонических уравнений функции (3) при

$m = \frac{1}{2a^2}$  и  $c = \frac{-1}{2b^2}$  является уравнение:

$$\frac{I_q^2}{a^2} - \frac{I_p^2}{b^2} = 2I_v \quad (4)$$

Поверхностью, задаваемой в ортонормированной системе координат каноническим

уравнением (4), является гиперболический параболоид (рис. 1).

В сечении гиперболического параболоида плоскостями, ортогональными осям  $OI_q$  и  $OI_p$ , получается парабола, а плоскостью, ортогональной оси координат  $OI_v$  — гипербола.

Гиперболический параболоид имеет также два семейства прямолинейных образующих. Одни прямолинейные образующие проходят строго через начало координат, то есть их проекции на плоскости  $I_q OI_p$  имеют положительный угол наклона к оси  $OI_q$ . Проекция других прямолинейных образующих, ортогональных проекциям первого семейства и имеют отрицательный угол наклона к оси  $OI_q$ .

Графически проекции гиперболы и проекции первого семейства прямолинейных образующих на плоскости  $I_q OI_p$  представлены на рисунке 2.

На плоскости  $I_q OI_p$  получаемая проекция гиперболы может быть представлена уравнением (1).

По сути аналитическое выражение (1) есть формула равнобочной гиперболы, заданной в неявном виде (явным заданием является  $I_p = I_v / I_q$ ). Горизонтальной асимптотой этой гиперболы является линия вида  $I_p = 0$ , вертикальной — линия вида  $I_q = 0$ . Центром симметрии выступает точка пересечения гра-

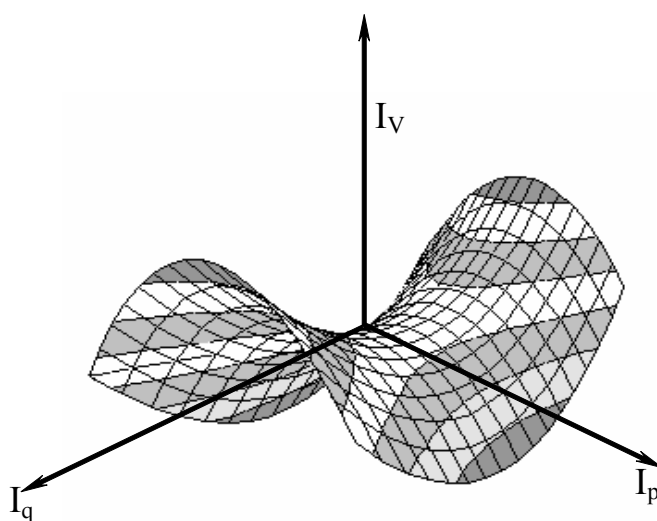


Рис. 1. Гиперболический параболоид

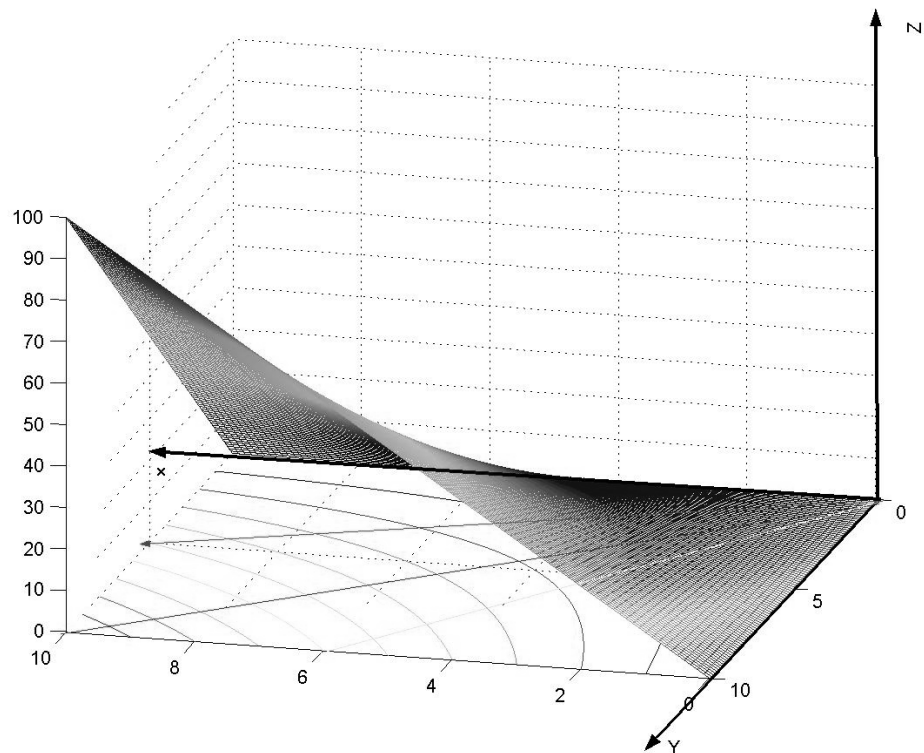


Рис. 2. Проекция гипербола и первого семейства прямолинейных образующих на плоскости  $I_q O I_p$

фика гипербола, построенного в координатах « $I_q O I_p$ », с биссектрисой первого координатного угла.

Докажем это.

Горизонтальная асимптота нашей гипербола — это прямая вида  $y = a \times x + b$ , где

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{I_q \rightarrow \infty} \frac{\frac{I_v}{I_q}}{\frac{I_q}{I_q}} = \lim_{I_q \rightarrow \infty} \frac{I_v}{I_q^2} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a \times x) = \lim_{I_q \rightarrow \infty} \left( \frac{I_v}{I_q} - 0 \times I_q \right) = \\ &= \lim_{I_q \rightarrow \infty} \frac{I_v}{I_q} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, график линии (1) бесконечно приближается к горизонтальной оси  $O I_q$ .

График линии (1) имеет также вертикальную асимптоту, так как в окрестности точки  $I_q = 0$  функция имеет точку разрыва второго рода

$$\lim_{I_p \rightarrow 0^+} \frac{I_v}{I_p} = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{I_p \rightarrow 0^-} \frac{I_v}{I_p} = \infty \quad (8)$$

Это означает, что линия (1) будет бесконечно приближаться к вертикальной оси  $O I_p$ , но никогда её не пересечёт.

Так как первая производная функции (1) всегда отрицательная на всей области определения

$$\frac{d}{dI_q} \left( \frac{I_v}{I_q} \right) = -\frac{I_v}{I_q^2} \quad (9)$$

то график линии функции (1) не имеет точек локального экстремума и равномерно убывает в интервале  $(0, +\infty)$ .

Исследовав вторую производную функции

$$\frac{d^2}{dI_q^2} \left( \frac{I_v}{I_q} \right) = 2 \times \frac{I_v}{I_q^3} \quad (10)$$

видим, что она всюду положительна на всей области определения, а значит, анализируемая функция (1) всюду вогнута и точек перегиба не имеет.

Если доопределить область определения нашей гиперболы на всю область действительных чисел, включая отрицательные, то получим

$$f(-I_q) = \frac{I_v}{-I_q} = -\frac{I_v}{I_q} = -f(I_q) \quad (11)$$

Выражение (11) показывает, что функция (1) является нечетной функцией, график которой симметричен относительно начала координат, а осью симметрии является биссектриса первого координатного угла — прямая  $I_p = I_q$ .

В пользу последнего утверждения говорит также тот факт, что, если в аналитическом задании функции поменять местами аргумент  $I_p$  и аргумент  $I_q$ , а затем снова выразить  $I_p$  через  $I_q$ , получим то же самое выражение

$$I_q = \frac{I_v}{I_p} \rightarrow I_p = \frac{I_v}{I_q} \quad (12)$$

Это подтверждает симметричность графика функции относительно первого координатного угла.

Геометрическое место точек полученной гиперболы — это множество всех точек ( $I_q$ ,  $I_p$ ), таких, что каждая из них удовлетворяет гиперболическому закону  $I_v = I_q \times I_p$ , то есть уравнение (1) на плоскости  $I_q O I_p$  является уравнением линии уровня совокупности таких точек, для которых

$$I_{q1} \times I_{p1} = I_{q2} \times I_{p2} = \dots = I_{qn} \times I_{pn} = I_v \quad (13)$$

На плоскости  $I_q O I_p$  проекции семейства прямолинейных образующих, проходящих через начало координат, могут быть заданы уравнением прямой линии в неявном виде:

$$IR = \frac{I_p}{I_q} \quad (14)$$

где  $IR$  — индексное отношение, показывающее во сколько раз индекс цены больше (меньше) индекса количества.

По значению  $IR$  можно непосредственно оценить то, что волнует участников рынка, а именно: что растёт быстрее или снижается медленнее — изменение цен опережает изменение количеств или наоборот. Например, цена увеличилась на 50%, а количество то-

варов — на 40%. Можно ли утверждать, что рост цен на 10% опережает рост количества товаров? Очевидно, что нет. Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо индекс цены ( $I_p = 1,5$ ) разделить на индекс физического объема ( $I_q = 1,4$ ), то есть  $1,5 / 1,4 = 1,071$ . Следовательно, рост цен опережает рост количеств на 7,1% или, что то же самое, изменение  $I_q$  на один процент приводит к изменению  $I_p$  на 1,071%.

Если  $IR > 1$ , то можно утверждать, что рост цен опережает рост объемов или снижение цен меньше падения объемов, либо цены растут, а объёмы снижаются.

При  $IR < 1$  можно утверждать, что цена либо растёт медленнее объёма, либо снижается быстрее его, либо цена снижается, а объём растёт.

Когда  $IR = 1$ , то изменение цен и изменение количеств сбалансированы между собой, то есть выгода (потеря) в цене тождественна выгоде (потере) в количестве товара.

Полагая, что  $IR > 1$  отвечает интересам продавца,  $IR < 1$  отвечает интересам покупателя,  $IR = 1$  свидетельствует о паритете интересов участников рыночных отношений, авторы считают  $IR$  границей разделения зон интересов рыночных контрагентов и в этом видят главный экономический смысл индексного отношения.

Как множество точек, проекции прямолинейных образующих, проходящих через начало координат, не могут являться линиями уровня, так как все точки прямолинейных образующих находятся на поверхности гиперболического параболоида. Проекция прямолинейной образующей на плоскости  $I_q O I_p$  имеет вид прямой линии, а аналитическое выражение такой прямой линии обладает схожим свойством с аналитическим выражением (13), а именно;

$$\frac{I_{p1}}{I_{q1}} = \frac{I_{p2}}{I_{q2}} = \dots = \frac{I_{pn}}{I_{qn}} = IR \quad (15)$$

Обобщенный графический образ линий уровня  $I_v$  и прямых  $IR$  приведен на рисунке 3.

Из рисунка 3 видно, что линии уровня  $I_v$  и прямые  $IR$  имеют только одну единственную точку пересечения на плоскости  $I_q O I_p$ . Координатами этой точки на плоскости являются  $I_q$  и  $I_p$ .

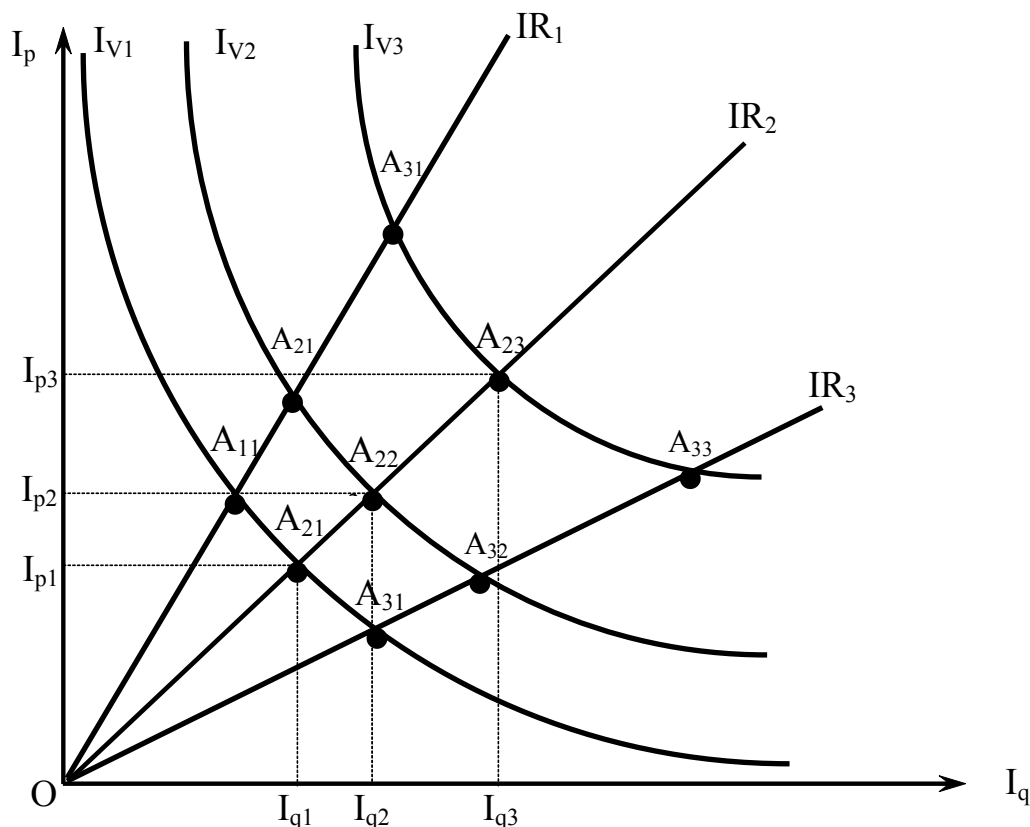


Рис. 3. Семейства линий уровня  $I_v$  и прямых  $IR$

Следовательно, зная  $I_v$  и  $IR$ , можно определить соответствующие им значения  $I_q$  и  $I_p$ . Для этого необходимо решить следующую систему совместных уравнений:

$$\begin{cases} I_v = I_q \times I_p \\ IR = \frac{I_p}{I_q} \end{cases} \quad (16)$$

Решение системы дает следующие результаты:

$$I_p = \sqrt{I_v \times IR} \quad (17)$$

$$I_q = \sqrt{\frac{I_v}{IR}} \quad (18)$$

Представленные формы индексов цены и объема в (17) и (18) являются гиперболическими, а следовательно, наиболее предпочтительными формами индексов.

Таким образом, авторами предлагается новый подход в построении индексов цены и количества, основанный на аналитическом рассмотрении стоимостного индекса как функции этих двух переменных и определяемый

авторами как аналитический.

Существенное отличие авторского подхода от традиционного:

1) на основе математического исследования пространственной функции стоимостного агрегата, как функции двух переменных, установлено, что «критерий произведения» Фишера может быть представлен уравнением линии уровня, которое позволяет учитывать фактор системности при взаимодействии индексов стоимости, цены и количества;

2) расширено понимание сути гиперболического индекса, который не только определяется через формулу квадратичного среднего и выражается гибкой функциональной формой, но и построение которого подчиняется строгому гиперболическому закону, математически выраженному в виде функции равнобочной гиперболы;

3) предложен новый статистический показатель — индексное отношение, которое характеризует уровень изменения цены при изменении уровня количества на один процент и выступает границей разделения зон интересов рыночных контрагентов;

4) взамен «конструирования» индексов

цены и количества предлагается определять эти индексы через значение стоимостного агрегата и соответствующее только ему значение индексного отношения;

5) предложены формулы расчета индексов цены и количества, которые не только имеют сходные свойства, обеспечивают сходные результаты и демонстрируют сходную динамику, но и лишены весового влияния, что является существенным моментом в современной индексной теории;

6) представлена новая графическая модель индекса стоимости, которая строится на одномерных индексных показателях цены и количества и позволяет в наглядной форме представить процесс разложения стоимостного агрегата на общие компоненты изменения цены и количества.

### Литература

1. *Fisher I.* The Purchasing Power of Money. — London: Macmillan, 1911. — P. 418.
2. *Frisch R.* Necessary and Sufficient Conditions Regarding the Form of an Index Number Which Shall Meet Certain of Fisher's Tests. // Journal of the American Statistical Association. — 1930. — Vol. 25. — Pp. 397–406.
3. МОТ / МВФ / ОЭСР / Евростат / ЕЭК ООН / Всемирный банк: Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. / Издание на русском языке. — Вашингтон: Международный Валютный Фонд, 2007. — С. 3.
4. *Diewert W. E.* Exact and Superlative Index Numbers. // Journal of Econometrics. — 1976. — Vol. 4. — Pp. 114–145.

Поступила в редакцию

5 апреля 2011 г.



**Анатолий Васильевич Курицын** — кандидат экономических наук, доцент, заведующий кафедрой Экономики и управления филиала Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) в г. Георгиевске (Ставропольского края).

**Anatoliy Vasilevich Kuritsin** — Ph.D., Candidate of Economics, docent, head of Economics department at Rostov State Economic University (RINE) branch in Georgievsk (Stavropolskiy kr.).

357821, Ставропольский кр., г. Георгиевск, ул. Парковая, д. 7, кв. 12  
7 Parkovaya st., app. 12, 357821, Georgievsk, Stavropolskiy kr., Russia  
Тел.: +7 (87951) 6-03-12, +7 (87951) 6-15-53; e-mail: sologubov68@mail.ru



**Сергей Владимирович Сологубов** — старший преподаватель кафедры экономико-управленческих и правовых дисциплин филиала Российского государственного гуманитарного университета в г. Георгиевске Ставропольского края.

**Sergey Vladimirovich Sologubov** — senior lecturer of Ecominc, Management and Law branches of learning department at Russian State Humanitarian University branch in Georgievsk (Stavropolskiy kr.).

357831, Ставропольский край, г. Георгиевск, ул. Строителей, д. 11, кв. 38  
11 Stroiteley st., app. 38, 357831, Georgievsk, Stavropolskiy kr., Russia  
Тел.: +7 (87951) 6-85-58, +7 (918) 874-18-97; e-mail: sologubov68@mail.ru



**Уважаемые коллеги!**

Приглашаем Вас принять участие во **Всероссийской научной школе «Микроэлектронные информационно-управляющие системы и комплексы»** (далее Школа), которая состоится с 5 по 7 сентября 2011 года на базе Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института).

**Организаторы Школы:**

Министерство образования и науки РФ;

Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт) (ЮРГТУ (НПИ)).

**Научные направления работы Школы:**

1. Элементы и устройства систем управления.
2. Информационно-измерительные и управляющие системы.
3. Кристаллы и структуры для микро- и нанoeлектроники.
4. Мехатронные информационно-управляющие системы и комплексы.

Контактная информация:

ЮРГТУ (НПИ). Ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, Ростовская обл., 346428,  
Тел.: +7 (8635) 255433, +7 (8635) 255220, факс: +7 (8635) 255433  
E-mail: electronics.2011@yandex.ru